第四届 AGMC 数学竞赛

【个人赛·高中组】

试 题 卷

[注意事项]

1. 本竞赛共有 14 道题，满分为 300 分，总时长为 5 小时。包含一试：上午 10:00~12:00 完成 10 道填空题；和二试：下午 2:00~5:00 完成 4 道解答题。
2. 每个部分题目按大致难度排序，题前标注了对应分值，解答题分步给分。
3. 本竞赛形式为线上考试，允许在知乎等平台查资料与使用软件辅助答题；可尝试使用：DS/Grok 4，几何 Geogebra，代数 Mathematica，组合 C++。备注：没有任何一道题是必须使用软件辅助的，解答题必须写人工过程。
4. 本竞赛为个人赛，禁止合作答题与在其他群内问题，被发现者成绩无效。
5. 时间结束后，请拍摄答题内容并上传至雨课堂。未按时上传者成绩无效。

【一试部分】

（本部分包含 10 道填空题，共 120 分）

1. [8] 若正整数 m，n 满足 $m\log_5 n=2025$，则 m^n 的最小值为 _____ .

2. [8] 若素数 p，q，r 满足 $pq+pr+qr=p+q+r+2025$，则 $pqr=$_____ .

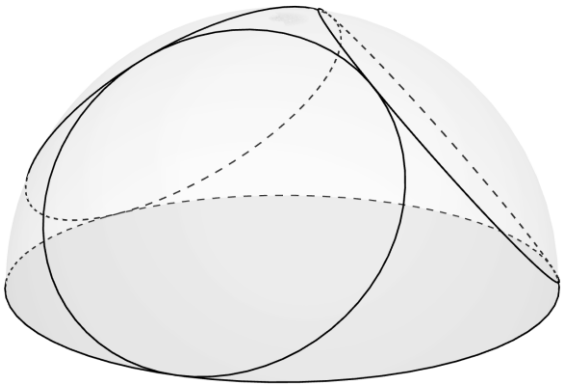
3. [10] 已知复数列 $\{z_n\}$，满足 $z_1=5$，$\mathrm{Im}\left(\dfrac{z_{n+1}}{k_n z_n}\right)>0$，$k_n^2 z_n^2+z_{n+1}^2=k_n z_n z_{n+1}$，其中 $k_n\in\mathbb{R}$；在复平面上，若所有的 z_n 均在椭圆

$$\frac{\mathrm{Re}(z)^2}{25}+\frac{\mathrm{Im}(z)^2}{16}=1$$

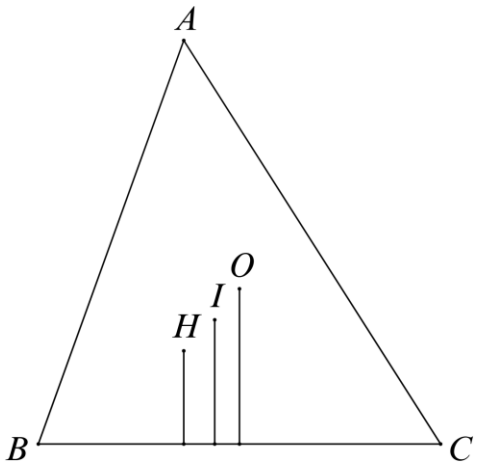
上，则 $k_{2025}=$_____ .

4. [10] 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=\dfrac{\pi}{3}$，若 $\cos(\cos A\cos B)=\dfrac{2\pi}{7}$，使用不含反三角函数的式子表示 $\sin(\sin^2 A+\sin^2 B)=$_____ .

5. **[12]** 如图，有一个半径为 1 的半球；若 3 个半径为 r 的截面圆两两相切，且均与该半球的底面圆周相切，则 $r=$ _____ .



6. **[12]** 如图，点 H，I，O 分别为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心，内心，外心，且到边 BC 的距离分别为 3，4，5，则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____ .



7. **[14]** 边长为 1 的正方形的四条边上均贴有平面镜，从其中一个顶点向其内部发射一道激光，经过多次反射后恰好达到了另一个顶点；已知入射角等于反射角，若该激光经过的路径将整个正方形分割成了 2025 个区域，则该激光经过的路径长度的最小值为 _____ .

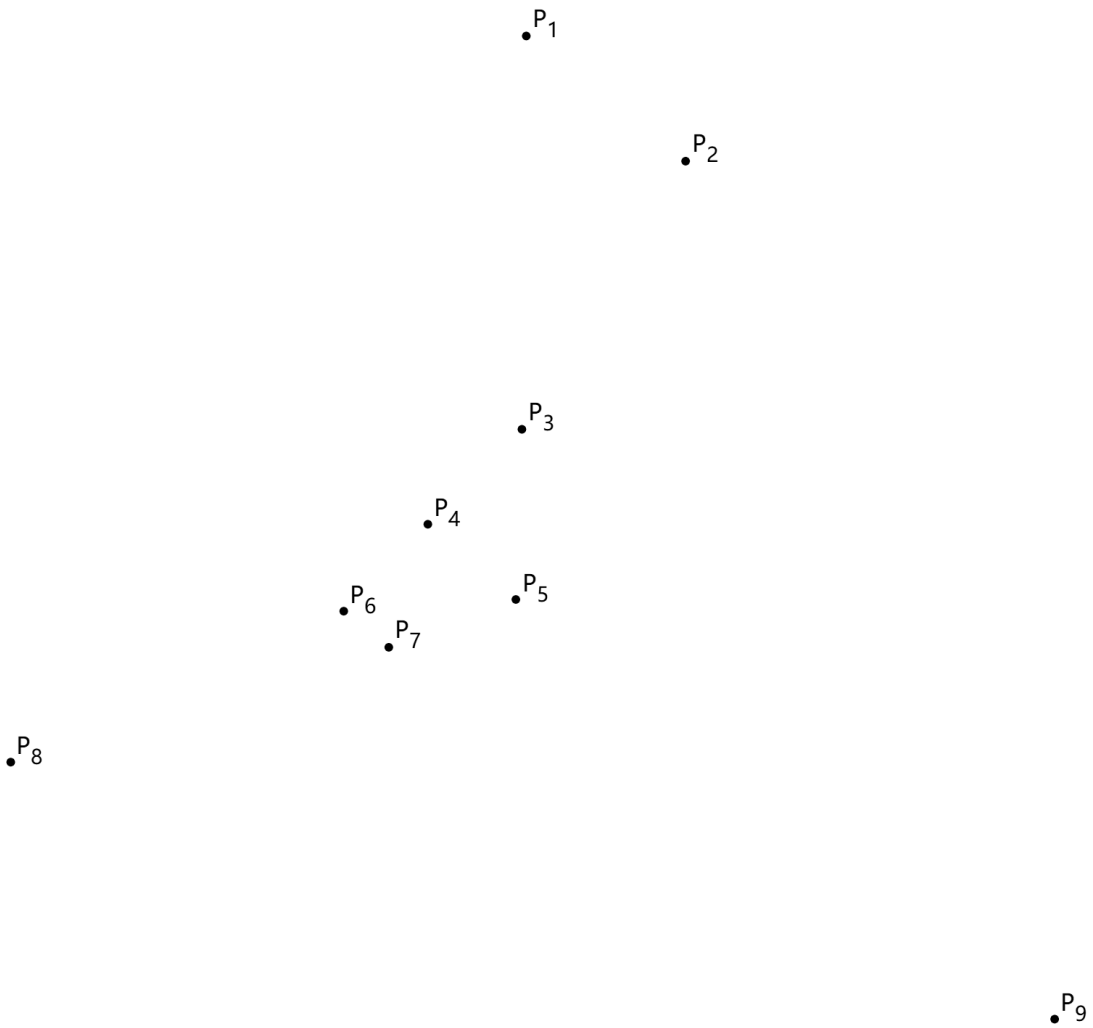
8. **[14]** 黑板上最初写有从 $\left\{n\in\mathbb{N}^{+}\middle|n\le 2025\right\}$ 中随机抽取的 9 个数；甲和乙轮流行动，甲先手；甲每次擦去其中两个数并写上它们的乘积，乙每次擦去其中两个数并写上它们的和数；最后黑板上剩下的一个数如果是奇数，则甲获胜，如果是偶数，则乙获胜；那么甲有必胜策略的概率为 _____ .

9. [16] 令 ω 为一个非实数的 47 次单位根，考虑所有次数不大于 46 的多项式 P，其各项系数均为 0 或 1，且满足

$$\sum_{k=0}^{46} \frac{P(\omega^{2k}) - P(\omega^k)}{\omega^{4k} + \omega^{3k} + \omega^{2k} + \omega^k + 1} = 47,$$

则满足条件的多项式 P 的数量为 _____ .

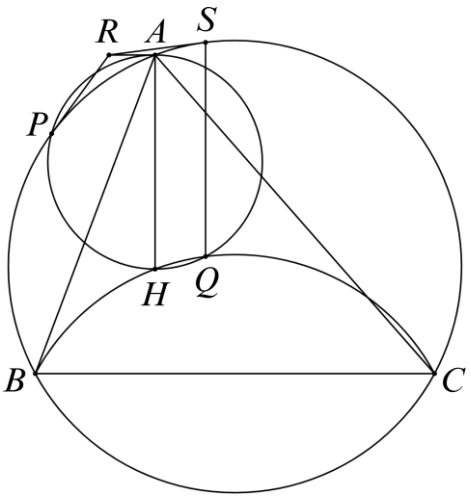
10. [16] 如图，有 $P_1 \sim P_9$ 九个点 P_k 乱序对应某三角形的内心 X_1，外心 X_3，垂心 X_4，陪位重心 X_6，切心 X_7（Gergonne 点），界心 X_8（Nagel 点），第二费马点 X_{14}，第一等力点 X_{15}，九点圆心的等角共轭点 X_{54}（Kosnita 点），请按照上述顺序写出对应的 k 值：_____ .（如果你写对了这 9 个 k 值中的 n 个 $(n \geq 1)$，则你将获得 $2(n-1)$ 分，写错不扣分；例如，若正确答案为 123456789，则 111111111 得 0 分，123459876 得 8 分，123456788 得 14 分）



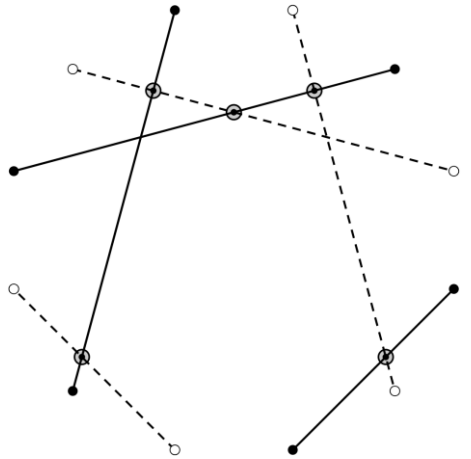
【二试部分】

（本部分包含 4 道解答题，共 180 分）

11. [40] 如图，点 H 为$\triangle ABC$ 的垂心；以 AH 为直径的圆分别交$\triangle ABC$，$\triangle HBC$ 的外接圆于点 P，Q；$\triangle ABC$ 的外接圆在点 P 处的切线交过点 A 且平行于 BC 的直线于点 R；设 RS 为$\triangle ABC$ 的外接圆异于 RP 的切线；求证：$SQ \perp BC$.



12. [40] 给定正整数 n，考虑这样的正 $4n$ 边形，其所有顶点被交替染成黑白两色；将两个黑点使用黑对角线连接，将两个白点使用白对角线连接，使得每个点都恰好在一条对角线上；如果黑对角线和白对角线相交了，我们称这种交点为“灰点”，不同的对角线组产生的重合灰点算作不同的灰点；例如，当 $n=3$ 时，下图所示的情形中灰点数量为 5；则对于任意的 n，求灰点数量的所有可能值构成的集合.



13. [50] 已知正整数 x，y 和素数 p 满足

$$(x+y)(x^p+y^p)=2^x+2^y,$$

求所有符合条件的三元组 (x,y,p).

14. [50] 定义非空数集 A 与 B 之间的 Minkowski 差为

$$A\ominus B=\{a-b\mid a\in A,b\in B\}.$$

对有限数集 A，$|A|$ 表示 A 中的元素个数；已知有限数集 $A_0,A_1,A_2,...,A_n$ 满足

$$|A_0\ominus A_0|=|A_1\ominus A_1|=|A_0|^2-|A_0|+1=|A_1|^2-|A_1|+1,$$

$$|(A_0\ominus A_1)\ominus(A_0\ominus A_1)|=|A_2\ominus A_2|=|A_0\ominus A_1|^2-|A_0\ominus A_1|+1=|A_2|^2-|A_2|+1,$$

...

$$|((...(A_0\ominus A_1)\ominus A_2)\ominus...\ominus A_{n-1})\ominus((...(A_0\ominus A_1)\ominus A_2)\ominus...\ominus A_{n-1})|=|A_n\ominus A_n|$$

$$=|(...(A_0\ominus A_1)\ominus A_2)\ominus...\ominus A_{n-1}|^2-|(...(A_0\ominus A_1)\ominus A_2)\ominus...\ominus A_{n-1}|+1=|A_n|^2-|A_n|+1.$$

若 $|A_0|=m$，求 $|(...(A_0\ominus A_1)\ominus A_2)\ominus...\ominus A_n|$ 的最小值.

（注：Minkowski 差常用于凸几何中，本题仅探讨其用于离散数集的形式）